



*E. Spare Andersen*



## Erik Sparre Andersen

29. december 1919 – 8. marts 2003

*Af Søren Johansen*

Erik Sparre Andersen blev født den 29. december 1919 i København, men voksede op i Odense. Han blev student fra Odense Katedralskole 1938, og begyndte at læse matematik på Den Polytekniske Læreanstalt, hvor Børge Jessen underviste. Efter første del flyttede han til Københavns Universitet og fortsatte sine studier hos Jessen. Han blev mag. scient. og cand. mag. 10. april 1943. Efter eksamen og soldatertid fik han først et legat på kr. 1.500 for 1944 og blev derefter ansat i Livs- og Genforsikringsselskabet Dana 1945-50, dernæst som aktuar i Pensions- og Livrente-Instituttet af 1919 og som direktør i Dana 1956-57. Med et stipendium på kr. 2.000 tilbragte han året 1948-49 på Cornell Universitet sammen med Feller, Kac og Kai Lai Chung. Således opretholdt han forbindelsen til matematikken, mens han arbejdede med forsikring, og publicerede en række artikler, der blev sammenfattet i disputatsen fra Københavns Universitet i 1955.

Som resultat af sin forskning modtog han flere tilbud om professorater i USA, men først da muligheden for et professorat i matematik i Århus opstod, slog han til og blev i 1958 kaldet af Svend Bundgaard til et professorat i matematik på Aarhus Universitet og havde derfra et forskningsophold i Minnesota i 1958. Han blev i 1966 kaldet af Jessen til et professorat i matematik på Københavns Universitet. Han accepterede at flytte, fordi han håbede at få mere uforstyrret tid til sin forskning. I København arbejdede han til pensionen i 1986, kun afbrudt af et ophold på Universitetet i Arizona i 1972.

Han blev medlem af Akademiet for de Tekniske Videnskaber fra 1961 og af Videnskabernes Selskab fra 1962. Han deltog i Selskabets aktiviteter og var kasserer 1978-1984, og dermed medlem af bestyrelsen for Aksel Tovborg Jensens legat, revisorsuppleant 1976, suppleant i bestyrelsen for Inge Lehmanns legat. Han sad i bestyrelsen for Carlsbergs Mindelegat for Brygger J. C. Jacobsen 1979-



85 og for Julie von Müllens Fond 1982-1993 og blev medlem af nationalkomiteen for matematik i 1959.

Han underviste i sandsynlighedsregning både i Århus og København. Hoffmann-Jørgensen fra Århus beretter, at Sparres undervisning ikke var nem at forstå, men at den var præget af stor kærlighed til faget. Selv fortæller han, at han blev fanget af faget, fordi han her mødte noget matematik, han ikke kunne forstå. I Århus benyttede Bundgaard Sparres tilstedeværelse til at skabe et inspirerende og aktivt miljø omkring Baxter, Darling, Donsker, Krickeberg og Sparre Andersen. Gruppen arbejdede blandt andet videre med de ideer, som Sparre fremlagde i sin disputats.

Nedenfor skal jeg kort gennemgå nogle af de problemer, Sparre Andersen arbejdede med, og de resultater og metoder, der gjorde hans navn internationalt kendt i sandsynlighedsregningen.

1. *Fluktuationsteori og kombinatorik.* Det emne, der har stået hans hjerte nærmest, og for hvilket han havde helt specielle evner, er kombinatorik og dens anvendelse i fluktuationsteorien. Allerede i gymnasiet i Odense havde han læst en bog af Netto om kombinatorik, hvor han fandt en fejl, som han publicerede en lille note om i Norsk Matematisk Tidsskrift. Under studierne må han have fortsat sin interesse for kombinatorik, for i 1949, efter opholdet i Cornell, kom resultatet om Arcus Sinus-loven i Skandinavisk Aktuarie Tidsskrift. Dette resultat gjorde hans navn kendt og er hans hovedbidrag til sandsynlighedsregningen. Artiklen blev fulgt op af en række resultater, der blev sammenfattet i disputatsen med titlen »Fluktuationer af summer af stokastiske variable«, fra 1955. Denne ændrede en måde at tænke på inden for arbejdet med summer af stokastiske variable.

Jeg vil benytte sprogbroen fra spil, hvor  $X_i$  betegner den (stokastiske) gevinst i  $i$ 'te spil, og  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  er den samlede gevinst til tid  $n$ , som angiver antallet af spil. Fluktuationsteorien beskæftiger sig med den stokastiske fluktuation af sådanne summer. På basis af summerne defineres en ny variabel,  $N_n$ , som er antallet af positive summer, og desuden  $L_n$ , som er tidspunktet for den største sum.

Lad os antage at  $E(X_i) = 0$ , således at man i gennemsnit ikke vinder eller taber. De store tals lov siger, at gennemsnittet konvergerer mod middelværdien, som er sat til 0. Man kan nu spørge, hvor stor en brøkdel af spillene, man har tilbragt på den vindende side. Dette er netop  $N_n/n$ .

Man må forvente, at fordelingen af  $N_n/n$  nok er symmetrisk omkring  $1/2$ , og at de mest sandsynlige værdier ligger omkring  $1/2$ . Det første udsagn er rigtigt, men det andet er helt forkert. Faktisk er de ekstreme værdier tæt på  $0$  eller  $1$  mest sandsynlige. Beviset, som skyldes Erdős og Kac (1947), benyttede, at for store  $n$  er fordelingen af  $S_n/\sqrt{n}$  tæt på en normalfordeling, og for normalfordelingen kan man regne sig igennem og finde tætheden  $f(x) = 1/\pi\sqrt{x(1-x)}$ .

Sparres bidrag er nu at vise det overraskende resultat, at det i virkeligheden ikke er et grænseresultat, som er det vigtigste, idet han kunne vise, at under den forudsætning, at  $X$ 'erne er ombyttelige og symmetriske omkring nul, gælder det, at sandsynligheden for at finde netop  $m$  positive summer blandt de  $n$  er givet ved udtrykket

$$P(N_n = m) = \binom{2m}{m} \frac{1}{2^{2m}} \binom{2(n-m)}{n-m} \frac{1}{2^{2(n-m)}},$$

hvor binomialkoefficienten  $\binom{2m}{m}$  betegner antallet af stikprøver, man kan udtage med  $m$  elementer fra en population af  $2m$  elementer. I øvrigt viste han, at positionen for første maksimum,  $L_n$ , har præcis samme fordeling, således at  $P(N_n = m) = P(L_n = m)$ .

Det overraskende er, at under disse generelle forudsætninger vil resultatet slet ikke afhænge af, hvilken fordeling de variable har, men kun af forudsætningen om ombyttelighed og symmetri omkring nul. Bidraget består således i at påpege, at resultatet slet ikke er et grænseresultat, men et generelt kombinatorisk resultat, som ikke afhænger af fordelingen. Disse resultater blev øjeblikkelig anerkendt af samtiden, og metoderne fandt hurtigt vej til lærebøgerne og dannede skole i den videre udvikling af fluktuationsteori, se for eksempel den klassiske lærebog af Feller (1950), hvor størstedelen af kapitlet om fluktuationsteori bygger på Sparres arbejde.

Sparre arbejdede i mange år med en samlet fremstilling af teori for fluktuationsteori, men den blev ikke fuldført. Efter sin pensionering i 1986 vendte Sparre tilbage til sit yndlingsemne, kombinatorik, og i perioden efter 1990 samarbejdede han med Mogens Esrom Larsen. De publicerede en række artikler om kombinatoriske identiteter. Problemet i dem er at få overblik og systematik i identiteter mellem binomialkoefficienter og forskellige faktoriel-



ler. Problemet med sådanne identiteter er, at de kan skrives på mange måder, der ofte gør dem vanskelige at genkende, så de har en tendens til at blive genopdaget med jævne mellemrum. Arbejdet består derfor i at finde en kanonisk formulering, som tillader at genkende identiteter, og naturligvis i at generalisere dem.

2. *Mål- og integralteori.* Sammen med sin lærer Børge Jessen udgav Sparre i 1946 og 1948 tre skrifter i Videnskabernes Selskabs Matematisk-fysiske Meddelelser. Disse artikler viderefører Jessens arbejder med integralteori og falder i tid sammen med, at Sparre underviste på Matematisk Institut i 1947-48. Integralteorien var veletableret i 1940'erne. Man kunne konstruere mål og integraler på mange forskellige rum. Til anvendelserne, specielt sandsynlighedsregning, har man brug for mål på rummet af uendelig mange variable, det vil sige produktrum med uendelig mange faktorer. Ideen er at konstruere et sådant mål som en grænseværdi af mål på produkter af endelig mange faktorer.

Kolmogorov og Daniell havde vist den såkaldte konsistenssætning for mål på produkt af reelle rum, og en række andre matematikere har vist det for produktmål på produkt af vilkårlige rum. Doob og Sparre Andersen havde prøvet at finde et bevis for en generel sætning, men i en artikel fra 1948 viser nu Jessen og Sparre et modeksempel, som viste grænsen for, hvilke resultater man kunne opnå. De to andre artikler handler om det, der nu kaldes martingalsætningen, og resultatet viste sig at være af fundamental betydning for både sandsynlighedsregning og statistik.

Man betragter her en følge af reelle funktioner,  $f_n$ . Vi definerer  $\mathcal{A}_n$  som systemet af mængder, der er funktioner af  $f_1, \dots, f_n$ , det vil sige alle de spørgsmål, der kan afgøres ved kendskab til  $f_1, \dots, f_n$ . Vi antager, at funktionerne opfylder martingalegenskaben, som siger, at  $E(f_{n+1} | f_1, \dots, f_n) = f_n$ . Den forventede værdi af den næste funktion, givet de forrige, er således blot den sidste funktion. Mængdefunktionerne  $\phi_n(A) = \int_A f_n dP_n$ ,  $A \in \mathcal{A}_n$  udgør en konsistent familie af mål, idet martingalegenskaben er ækvivalent med betingelsen  $\phi_{n+1}(A) = \phi_n(A)$ ,  $A \in \mathcal{A}_n$ . Hvis man nu antager, at der findes et mål,  $\phi$ , defineret på et passende stort system af mængder, der indeholder  $\mathcal{A}_n$ , således at  $\phi(A) = \phi_n(A)$ , når  $A \in \mathcal{A}_n$ , da siger den nu klassiske martingalkonvergenssætning, som blev vist af Sparre og Jessen, at  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  eksisterer og kan karakteriseres ved  $\int_A f_n dP_n = \int_A f dP_n$ ,  $A \in \mathcal{A}_n$  eller, med den anden notation,  $E(f | f_1, \dots, f_n) = f_n$ . En

tilsvarende, men mere generel sætning var vist af Doob nogenlunde samtidig, men krigen forhindrede hurtig udveksling af information. Man kan sige, at mens Jessen og Sparre Andersen benyttede en sprogbug og begreber direkte hentet fra integrationsteorien, var Doobs begreber meget stærkere knyttet til en analyse af den stokastiske opførsel af processens udfaldsfunktion  $f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Således baserede Doob sit konvergensbevis på en ulighed, der begrænser fluktuationen af processen. Denne fluktuationsteori var netop det gennemgående tema i Sparres arbejder, som førte til disputatsen.

Bidraget af Jessen og Sparre, som blev publiceret før arbejderne med fluktuationsteorien, satte definitivt Danmark på verdenskortet i emnet sandsynlighedsregning. Martingalbegrebet er fundamentalt i sandsynlighedsteorien, idet man nu har sætninger, der beskriver den asymptotiske fordeling af martingaler, resultater, der udnyttes effektivt i analysen af estimatorer og teststørrelser i statistikken. Det grundlæggende resultat er, at scorefunktionen i en statistisk model altid er en martingal, således at begrebet martingal er af fundamental betydning for statistisk analyse. I Sparres mindeord om Børge Jessen anfører han, at »det ene af disse værker blev i 1955 trykt i andet oplag, så stor havde interessen været.«

2. *Forsikringsmatematik*. I risikoteorien beskæftiger man sig med modeller for sandsynligheden for, at et forsikringssselskab går fallit. Det antages, at præmiestrømmen indgår jævnt med tiden,  $ct$ , og at skader til tid  $T_n$  medfører en udbetaling  $X_n \geq 0$ . Den stokastiske model skal nu specificere fordelingen af de stokastiske variable  $(X_n, T_n)$ .

Den klassiske model, udviklet af Filip Lundberg omkring 1925, antager at  $T_n - T_{n-1}$  var uafhængige, identisk exponentialt fordelte variable, således at skaderne kommer tilfældigt, hvorimod de uafhængige, identisk fordelte  $X_n$  kunne have en vilkårlig fordeling. Man kan under disse forudsætninger vise, at ruinsandsynligheden er begrænset af udtrykket  $\exp(-uR)$ , hvor  $u$  er initialformuen og  $R$  en konstant afhængig af fordelingen af  $(X_n, T_n)$ . Dette er Lundbergs ulighed. Formlen kan bruges til at vurdere, hvor mange reserver der skal afsættes for at sikre selskabet (og kunderne) mod at gå fallit.

Sparre Andersen arbejdede i årene 1945-57 med forsikring og må have mødt dette klassiske problem i sit arbejde. Hans artikel



fra 1957 behandler dette problem, idet sandsynligheden for, at en skade indtræffer, tillades at afhænge af, hvornår den seneste skade indtraf. Fordelingen af afstanden til næste skade  $T_n - T_{n-1}$  generaliseres derved til at have en vilkårlig fordeling. Derved indførte han metoderne fra fornyelsesprocesser i risikoteorien. Dette tilførte en ny metode til emnet. En metode, som afklarede den matematiske struktur af problemet. Arbejdet med modellen i denne ånd fortsattes i 70'erne af Olaf Thorin fra Sverige, og der udledes stadig ny egenskaber ved »the Sparre Andersen process« i risikoteorien.

Sparre forfulgte sin interesse for forsikring med at udarbejde grundlaget for ATP i 1963. Ordningen går ud på, at alle betaler samme årlige bidrag, og alle får samme bidrag efter det fyldte 67. år. Problemet er, hvad en sådan ordning skal koste, og Sparre fandt, at prisen for en årlig udbetaling på 100 kr. skal sættes til kr. 396. Denne ordning holdt uændret i 40 år. Sådanne beregninger bygger på modeller for befolkningsudviklingen, og han ansatte i 1966 Erik Bonnerup, der fortæller, at de arbejdede med simulationer på den daværende GIER-maskine, og at de muligvis var nogle af de første, der gennemførte så store simulationsopgaver, som var blevet mulige at udføre ved fremkomsten af de elektroniske regnemaskiner.

Da Sparre blev kaldet til Københavns Universitet, var det nok med den bagtanke fra Jessen, at han skulle afløse Jessen som institutbestyrer, når denne blev 60 i 1967. Sparre fungerede da også som bestyrer for Matematisk Institut 1967-1973 og blev dermed den første valgte bestyrer, efter den ny styrelseslov, ved Matematisk Institut. Desuden var han formand for H. C. Ørsted Institutet i 1967 og blev indvalgt i fakultetsrådet 1974-77 og i Statens Naturvidenskabelige Forskningsråd 1971-1977, var formand for Dansk Matematisk Forening 1966-1970 og for det faglige landsudvalg for de naturvidenskabelige uddannelser 1976-78.

En af de sager, som lå Sparre på sinde, var udnyttelsen af de dengang nyintroducerede regnemaskiner, så Sparre havde en ivrig forbindelse til A/S Regnecentralen, var medlem af bestyrelsen fra 1964 til 1977 og benyttede både DASK og senere GIER. Han var i Århus medlem af Konsistoriums RC-udvalg og en kort overgang formand for Aarhus Universitets Regnecenter. Sparre var institutbestyrer, da Datalogisk Institut blev oprettet i 1970, og da Peter Naur blev kaldet til det første professorat i datalogi i 1969.



Erik Sparre Andersen har ydet originale videnskabelige bidrag af international kvalitet. Hans resultater har defineret nogle væsentlige pejlemærker i den moderne sandsynlighedsteori. Desuden har han ledet Matematisk Institut i den overgangsperiode, der fulgte efter den ny styrelseslov, og har været med til at skabe rammerne for datalogifaget.

Æret være hans minde.